SCENARIUSZ LEKCJI MATEMATYKI

Temat: Podzielność liczb całkowitych **Cel:** Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność
Czas: 1 godzina dydaktyczna
Cele zajęć: Uczeń po zajęciach: • przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach, • opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami, • używa wzorów skróconego mnożenia, • rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias.
Metody pracy: • ćwiczenia • dyskusja
Formy pracy: • praca w grupach • praca z całą klasą
Materiały dydaktyczne: • plansze z wzorami • karty pracy (wersja dla zakresu podstawowego i rozszerzonego)

Przebieg zajęć:

1. Przedstawienie celów lekcji.
2. Sprawdzenie zadania domowego – przypomnienie wzorów skróconego mnożenia.
3. Podział klasy na grupy i rozdanie kart pracy.
4. Wybór uczniów do prezentacji rozwiązań.
5. Praca domowa (pozostałe zadania z listy).

ZAŁĄCZNIK I – karty pracy (zakres podstawowy)

Karta pracy 1

Zad.1. Wykaż, że jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 6, to liczba postaci $n^2 + 7$ jest podzielna przez 8.

Karta pracy 2

Zad.2. Wykaż, że jeśli dwie liczby całkowite różnią się o 2, to różnica ich czwartych potęg jest podzielna przez 8.

Karta pracy 3

Zad.8. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5.

Karta pracy 4

Zad. 5. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $(n - 1)(n + 1)(n + 3)$ jest liczbą podzielną przez 48.

ZAŁĄCZNIK II – szkice rozwiązań zadań

Zad.1.

Dane: $n = 2k + 1 = 3t$ $\quad$ n,k,t: liczby naturalne

Zatem: $n^2 + 7 = (2k + 1)^2 + 7 = 4k^2 + 4k + 8 = 4k(k + 1) + 8$

Liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez 8.

Zad.2.

Dane: $k – t = 2$ $\quad$ k,t: liczby całkowite

Zatem: $k^4 – t^4 = (k^2 – t^2)(k^2 + t^2) = (k – t)(k + t)(k^2 + t^2)$,

$k = t + 2$, to $2(2 + 2t)[(2 + t)^2 + t^2] = 8(t + 1)(2 + 2t + t^2)$

Zad.8.

Dane : $7k + 3$, $7t + 4$ k, t: liczby całkowite

Zatem: $(7k + 3)(7k + 4) = \ldots = 7(7kt + 4k + 3t + 1) + 5$

Zad.5.

Dane: $n = 2k + 1$ k: liczba naturalna

Zatem: $(2k + 1 – 1)(2k + 1 + 1)(2k + 1 + 3) = \ldots = 8k(k + 1)(k + 2)$

Liczba $k(k + 1)(k + 2)$ jest podzielna przez 6.

ZAŁĄCZNIK III – karty pracy (zakres rozszerzony)

Karta pracy 1

Zad.3. Wykaż, że jeżeli *p* jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2 przy dzieleniu przez 24 daje resztę 1.

Karta pracy 2

Zad.6. Udowodnij, że jeżeli *n* jest liczbą naturalną taką, że $n - 3$ jest podzielne przez 4, to $n^3 + 9$ jest podzielne przez 2.

Karta pracy 3

Zad.7. Udowodnij, że $10 | 53^{53} - 33^{33}$.

Karta pracy 4

Zad.9. Liczby $10^{20}-1$ i $10^{30}-1$ są podzielne przez 41. Uzasadnij, że liczby $10^{30}-10^{20}$ i $10^{12}-100$ są również podzielne przez 41.

ZAŁĄCZNIK IV – szkice rozwiązań zadań

Zad.3

Musimy pokazać, że $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ dzieli się przez 24, czyli, że dzieli się przez 8 i przez 3. Ponieważ p jest liczbą pierwszą większą od 3, więc nie dzieli się przez 3. Zatem przez 3 dzieli się jedna z liczb $p - 1$ lub $p + 1$, czyli $p^2 - 1$ dzieli się przez 3.

Pozostało wykazać, że $p^2 - 1$ dzieli się przez 8. Liczba p jest nieparzysta, więc jest postaci

$4k + 1$ lub $4k + 3$ (bo nie może być postaci $4k + 2$ ani $4k$). Zatem odpowiednio

$p^2 - 1 = (4k + 1)^2 - 1 = 16k^2 = 8k = 1 - 1 = 8(2k^2 + k)$

$p^2 - 1 = (4k + 3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 9 - 1 = 8(2k^2 + 3k + 1)$

W obu przypadkach otrzymujemy liczbę podzielną przez 8.

Zad.6

Dane: $n - 3 = 4k$, k jest liczbą naturalną

Zatem: $n = 4k + 3$

$n^3 + 9 = (4k + 3)^3 + 9 = 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 + 9 = 64k^3 + 144k^2 + 108k + 36 =$

$= 2(32k^3 + 72k^2 + 54k + 18)$

Zad.7

$10 | (53^{53} - 33^{33}) \Leftrightarrow 53^{53} - 33^{33} \equiv 0 \pmod{10}$

$53 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 53^{53} \equiv 3^{53} \pmod{10}$

Mamy:

$3 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^2 \equiv -1 \pmod{10}$

$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

Ale: $3^{53} = 3^{4 \cdot 13 + 1} = 3 \cdot 3^{4 \cdot 13} \equiv 3 \cdot 1 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$

Podobnie: $33 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 33^{33} \equiv 3^{33} \pmod{10}$

Więc: $3^{33} = 3^{4 \cdot 8 + 1} = 3 \cdot 3^{4 \cdot 8} \equiv 3 \cdot 1 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$

Zatem: $53^{53} - 33^{33} \equiv 3 - 3 \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$

Zad.9

Jeżeli liczby a = $10^{20} - 1$ i b = $10^{30} - 1$ są podzielne przez 41, to przez 41 dzieli się też ich różnica: b – a = $10^{30} - 1 - (10^{20} - 1) = 10^{30} - 10^{20}$.

Zauważmy ponadto, że

$10^{30} - 10^{20} = 10^{18}(10^{12} - 10^{2}) = 10^{18}(10^{12} - 100)$

Ponieważ 10^{18} nie dzieli się przez 41 i 41 jest liczbą pierwszą, liczbą podzielną przez 41 musi być $10^{12} - 100$.

ZAŁĄCZNIK V

Podzielność liczb całkowitych - zadania (zasoby Internetu).

Zad.1. Wykaż, że jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 6, to liczba postaci $n^2 + 7$ jest podzielna przez 8.

Zad.2. Wykaż, że jeśli dwie liczby całkowite różnią się o 2, to różnica ich czwartych potęg jest podzielna przez 8.

Zad.3 Wykaż, że jeżeli *p* jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2 przy dzieleniu przez 24 daje resztę 1.

Zad.4. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej *n* liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Zad.5. Wykaż, że jeżeli *n* jest liczbą nieparzystą to liczba $(n - 1)(n + 1)(n + 3)$ jest liczbą podzielną przez 48.

Zad. 6. Udowodnij, że jeżeli *n* jest liczbą naturalną taką, że $n - 3$ jest podzielne przez 4, to $n^3 + 9$ jest podzielne przez 2.

Zad. 7. Udowodnij, że $10 | 53^{53} - 33^{33}$.

Zad.8. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daję resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5.

Zad.9. Liczby $10^{20}-1$ i $10^{30}-1$ są podzielne przez 41. Uzasadnij, że liczby $10^{30}-10^{20}$ i $10^{12}-100$ są również podzielne przez 41.

Zad.10. Znajdź cyfry *x, y, z* wiedząc, że liczba xyz138 dzieli się przez 7, liczba 138xyz przy dzieleniu przez 13 daje resztę 6, a liczba x1y3z8 przy dzieleniu przez 11 daje resztę 5.