Podzielność liczb całkowitych

(źródło: zasoby internetu; wybór: Ewa Ludwikowska)

Zad.1. Wykaż, że jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 6, to liczba postaci $n^2 + 7$ jest podzielna przez 8.

Zad.2. Wykaż, że jeśli dwie liczby całkowite różnią się o 2, to różnica ich czwartych potęg jest podzielna przez 8.

Zad.3 Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2przy dzieleniu przez 24 daje resztę 1.

Zad.4. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Zad.5. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą to liczba $(n-1)(n+1)(n+3)$ jest liczbą podzielną przez 48.

Zad. 6. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną taką, że $n - 3$ jest podzielne przez 4, to $n^3 + 9$ jest podzielne przez 2.

Zad. 7. Udowodnij, że $10|53^{53} - 33^{33}$.

Zad.8. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daję resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5.

Zad.9. Liczby $10^{20} - 1$ i $10^{30} - 1$ są podzielne przez 41. Uzasadnij, że liczby $10^{30} - 10^{20}$ i $10^{12} - 100$ są również podzielne przez 41.

Zad.10. Znajdź cyfry *x, y, z* wiedząc, że liczba xyz138 dzieli się przez 7, liczba 138xyz przy dzieleniu przez 13 daje resztę 6, a liczba x1y3z8 przy dzieleniu przez 11 daje resztę 5.

Rozwiązania wybranych zadań

Zadanie 3.

Sposób I

Musimy pokazać, że

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

dzieli się przez 24, czyli, że dzieli się przez 8 i przez 3. Ponieważ p jest liczbą pierwszą większą od 3, więc nie dzieli się przez 3. Zatem przez 3 dzieli się jedna z liczb $p-1$ lub $p+1$, czyli p^2-1 dzieli się przez 3.

Pozostało wykazać, że p^2-1 dzieli się przez 8. Liczba p jest nieparzysta, więc jest postaci $4k+1$ lub $4k+3$ (bo nie może być postaci $4k+2$ ani $4k$). Zatem odpowiednio

$$p^2 - 1 = (4k+1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k + 1 - 1 = 8(2k^2 + k)$$
$$p^2 - 1 = (4k+3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 9 - 1 = 8(2k^2 + 3k + 1).$$

W obu przypadkach otrzymujemy liczbę podzielną przez 8.

Sposób II

Tak jak wyżej zauważamy, że liczba p nie dzieli się przez 2 ani przez 3. Zatem jest postaci $12k + r$, gdzie $r \in \{1, 5, 7, 11\}$. Mamy zatem

$$p^2 - 1 = (12k + r)^2 - 1 = 144k^2 + 24kr + r^2 - 1.$$

Podstawiając za r liczby 1,5,7,11 łatwo sprawdzić, że w każdym przypadku $r^2 - 1$ dzieli się przez 24.

Zadanie 6.

<u>Założenie:</u>

a ∈ N, a-3 = 4k

<u>Teza:</u> $a^3+9 = 2s$

<u>Dowód</u>:

a-3=4k

Wyliczamy a=4k+3

$a^3+9 = (4k+3)^3 +9$

Obliczamy

$(4k+3)^3+9 = 64k^3+144k^2+ 108k+27+9=64k^3+144k^2+ 108k+36$

Wyłączamy 2 przed nawias $2(32k^3+72k^2+54k+18) =2s$

Liczba $(32k^3+72k^2+54k+18) \in N$ zatem warunki zadania zostały spełnione.

Zadanie 7.

$53 \equiv 3 \pmod{10}$

$53^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$

$(53^2)^{26} \equiv 9^{26} \equiv (-1)^{26} \equiv 1 \pmod{10}$

$53^{52} \equiv 1 \pmod{10}$

$53^{53} \equiv 3 \pmod{10}$

$33 \equiv 3 \pmod{10}$

$33^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$

$(33^2)^{16} \equiv 9^{16} \equiv (-1)^{16} \equiv 1 \pmod{10}$

$33^{32} \equiv 1 \pmod{10}$

$33^{33} \equiv 3 \pmod{10}$

$53^{53} \equiv 33^{33} \pmod{10}$, co świadczy o tym, że liczba $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 9.

Jeżeli liczby $a = 10^{20} - 1$ i $10^{30} - 1$ są podzielne przez 41, to przez 41 dzieli się też ich różnica:

$$b - a = 10^{30} - 1 - (10^{20} - 1) = 10^{30} - 10^{20}.$$

Zauważmy ponadto, że

$$10^{30} - 10^{20} = 10^{18}(10^{12} - 10^2) = 10^{18}(10^{12} - 100).$$

Wiemy, że liczba ta dzieli się przez 41. Ponieważ 10^{18} nie dzieli się przez 41 i 41 jest liczbą pierwszą, liczbą podzielną przez 41 musi być $10^{12} - 100$.